	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

۱- هدف تحقیق در عملیات (OPERATIONS RESEARCH)

تعیین بهترین (Optimum) راه حل در یک مسئله تصمیم گیری با توجه به اعمال محدودیت ها و روابط آنها هدف تحقیق در عملیات است.

ویژگی یک مدل تصمیم گیری

- خلاصه سازی یک مسئله تصمیم گیری بطوری که تصمیم گیرنده بتواند :
- بطور سیستماتیک مشخصات آلترناتیوهای امکان پذیر را شناسایی کند.
 - بطور سیستماتیک آلترناتیوها را ارزش گذاری کند.
 - بهترین آلترناتیو را با توجه به کلیه حالت ها انتخاب کند.

عناصر یک مدل تصمیم گیری

سه عنصر اساسی یک مدل تصمیم گیری بصورت زیرند :

- ۱- آلترناتیوهای تصمیم
 - ۲- محدودیت های مسئله
 - ۳- معیار هدف
- توسط مثال زیر این اجزاء مشخص می گردند.

مثال ۱-۱

در طی ماههای تابستان یک متخصص که در شهر A زندگی می کند باید ۵ هفته جهت مشاوره به شهر B برود.


جلسات مشاوره به گونه ای است که این فرد هر هفته باید در روز دوشنبه پرواز کرده و در روز چهارشنبه همان هفته مراجعت کند.

بلیط دو طرفه ۹۰۰ دلار می باشد.

بلیط دوطرفه اگر شامل یک آخر هفته باشد شامل ۲۰٪ تخفیف می گردد.

بلیط یک طرفه در هر طرف ۷۵٪ قیمت بلیط دو طرفه بدون تخفیف است.

این شخص را در مورد خرید بلیط بطوریکه پول کمتری بپردازد راهنمایی کنید.

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم

حل :

ابتدا آلترناتیوها را مشخص می کنیم.

آلترناتیو ۱- خرید ۵ بلیط رفت و برگشت (A-B-A) بصورت رفت دوشنبه برگشت چهارشنبه همان هفته
آلترناتیو ۲-

به هر آلترناتیو که برای ما شدنی باشد جواب موجه یا جواب ممکن (Feasible solution) می گوییم.

بعد از مشخص شدن آلترناتیوها باید معیار ارزیابی یا هدف را مشخص کنیم در این مثال واضح است که هدف ، پرداخت هر چه کمتر برای خرید بلیط ها است. پس داریم:

$$5 * 900 = 4500 \$ \quad \text{هزینه آلترناتیو ۱-}$$

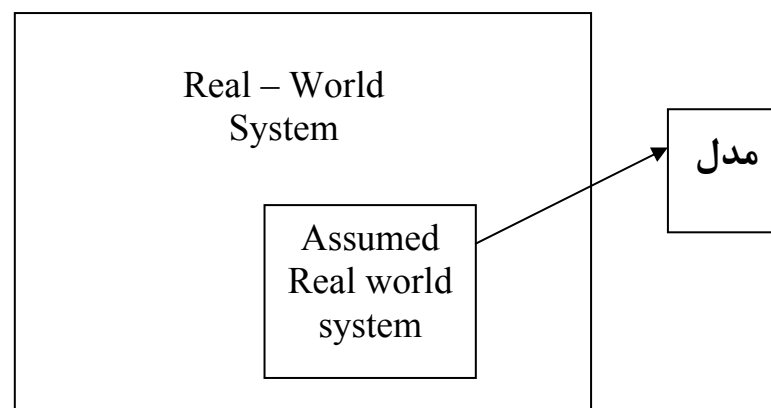
هزینه آلترناتیو ۲-


باتوجه به ارزش گذاری ، بهترین آلترناتیو انتخاب می شود. به بهترین آلترناتیو جواب بهینه (optimum solution) می گوییم.

هنر مدلسازی

یک مدل دارای تابع هدف و همچنین محدودیت ها و ارتباطات بین عوامل و پارامترهای تصمیم گیری می باشد. مدل باید به گونه ای با توجه به واقعیت انتخاب شود که:

- ۱ - مرزهای بین واقعیت و فرضیات ما از دنیای واقعی را مشخص کند.
- ۲ - ارتباط و محدودیت ها را نشان دهد.



	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم


باید توجه داشت که مفروضات ساده تر از دنیای واقعی ما را به مدل‌های ساده تر می‌رساند.

مثال ۱-۲

تولید کننده یک خانواده محصول را در نظر بگیرید. بعد از مراحل طراحی یک محصول سفارش تولید آن به دپارتمان تولید فرستاده می شود. دپارتمان تولید باید با توجه به هماهنگی ها و همکاری دپارتمان مواد و بخش فروش و بازاریابی به امر تولید بپردازد. حال اگر شما در پی یافتن سطح تولید مناسب جهت این محصول باشید باید چه کنید؟ با یک نگاه جامع به این سیستم متوجه زیادی فاکتورهای مربوط در تصمیم گیری می‌شویم به عنوان مثال:

- ۱- فاکتورهای مربوط در دپارتمان تولید شامل: ساعت موجود ماشین آلات - توالی عملیات تولیدی - موجودی در جریان ساخت - مقدار ضایعات - هزینه‌های هریک.
- ۲- فاکتورهای مربوط در دپارتمان مواد شامل: موجودی هر قلم کالا و مواد در انبار- میزان و زمان رسیدن مواد سفارش داده شده - محدودیت های انبار از لحاظ فضا و سرمایه و هزینه های هریک.
- ۳- فاکتورهای مربوط به دپارتمان فروش و بازاریابی شامل: پیش بینی فروش میزان و انواع آگهی های مورد نیاز - ظرفیت تجهیزات توزیع و اثر رقبا.

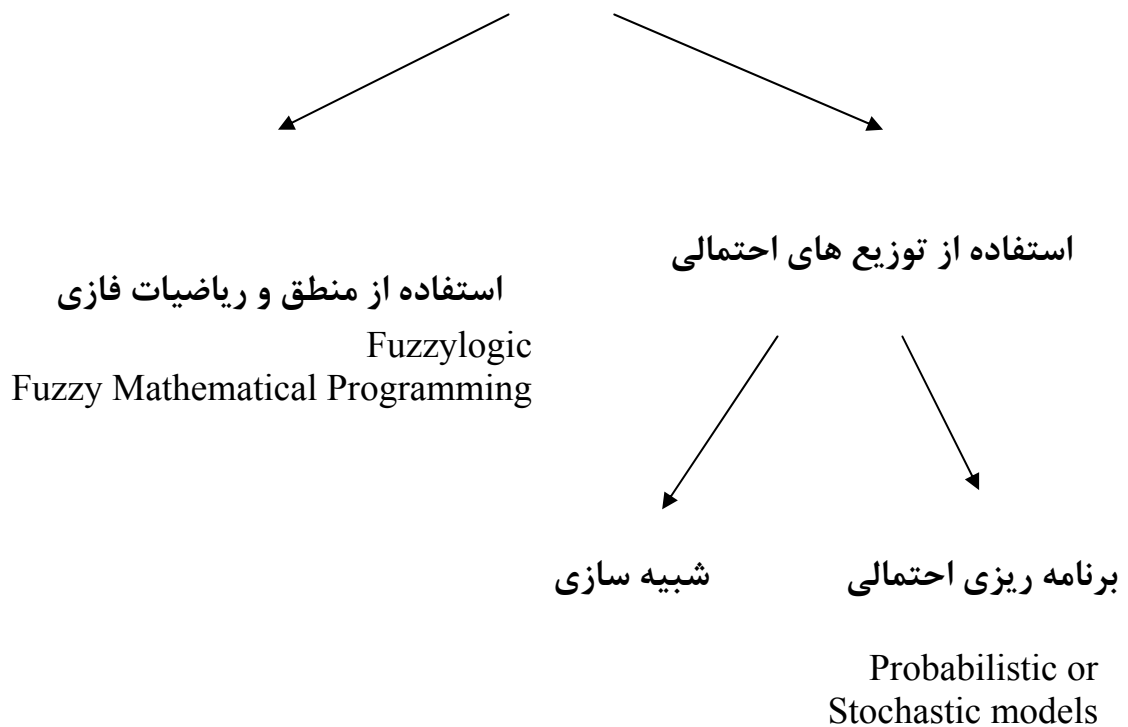
اگر هر یک از فاکتورهای بالا بخواهد بطور واضح در مدل برای تعیین سطح تولید در نظر گرفته شود، شاید دچار سردرگمی شویم و لازم است که برخی فاکتورها در نظر گرفته نشوند و یا با فرضیات ساده نسبت به حالت واقعی در نظر گرفته شوند. البته نگرش دیگر در مدلسازی سیستم های پیچیده استفاده از شبیه سازی می باشد. تفاوت شبیه سازی و مدلسازی ریاضی در این است که ارتباط بین خروجی و ورودی واضح و آشکارا مشخص نیست هرچند که همکاری هر دو می تواند راه حل های بهتری را در سیستم های پیچیده ارائه دهد.

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم


اثر فراهم بودن داده ها در روی مدل

یک مدل صرفنظر از دقت و پیچیدگی آن بدون قابلیت اطمینان مناسب از داده ها کارایی ندارد و اهمیت زیادی دارد که ما چگونه داده ها را تخمین زده و یا محاسبه می کنیم. در مواردی که داده ها بطور واضح و دقیق موجود نباشند شاخه های تخصصی تحقیق در عملیات می تواند راه گشای کار باشد. نمودار زیر می تواند یک دسته بندی عملی در این مورد را ارائه دهد.

وجود داده های غیر قطعی و نادقیق



بعنوان مثال تعیین دقیق فاکتورهایی نظیر سهم بازار و یا هزینه کسری یک واحد کالا در فروشگاه امکان پذیر نیست.

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

ویژگی محاسبات در **OR**

- محاسبات در شبیه سازی وقت گیر است و به طول زمان وابسته می باشد.

- محاسبات در مدل های ریاضی مرحله ای است و دقت آن به ساختار مدل نیز

بستگی دارد. در بعضی موارد به لحاظ پیچیدگی، جواب بهینه قابل یافت نمی باشد.

بدین جهت برخی افراد به دنبال روشهایی رفته اند که جواب خوبی را در مدت زمان

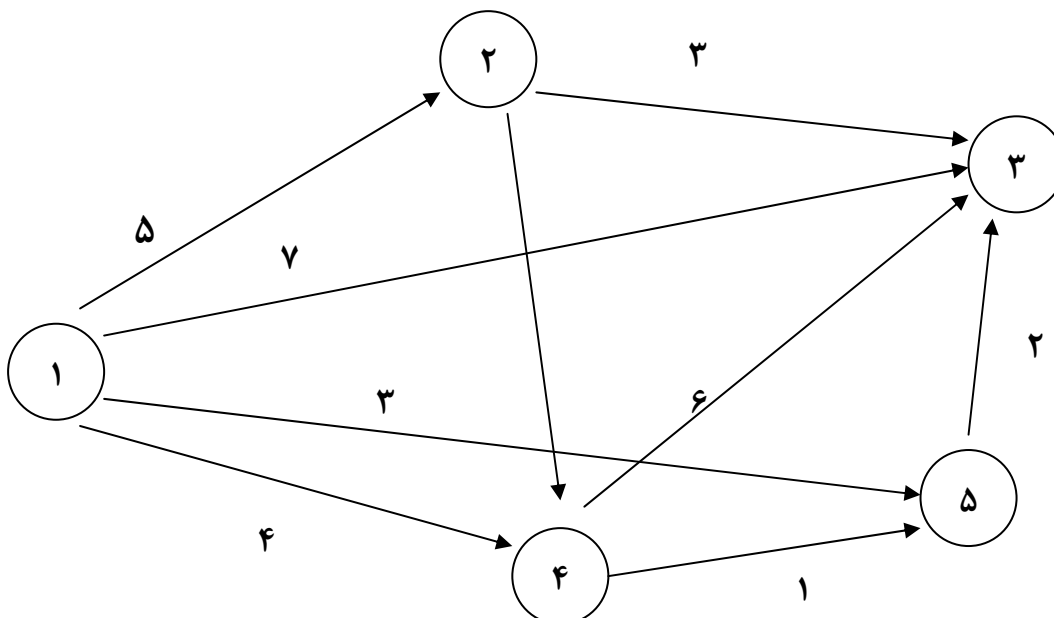
کوتاهی ارائه دهد. این دسته تکنیک ها که بهینگی جواب بدست آمده را تضمین نمی کنند


روشهای Heuristic نامیده می شوند.

مثال ۱-۳: با توجه به شکل زیر فرض کنید که می خواهیم از شهر ۱ به شهر ۳ برویم

مدت زمان لازم با توجه به مسیرهای متعدد روی کمانها نوشته شده است بهترین انتخاب

کدام است؟



	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم	۲۶ از ۶ صفحه

اگر شبکه بزرگتر باشد یافتن بهترین مسیر به راحتی امکان پذیر نیست. یک روش Heuristic برای آن پیشنهاد کنید.

مراحل یک کار OR

۱ - تعریف مسئله

- اهداف و آرمانها
- آلترناتیوها
- چارچوب و محدوده کار

۲ - تعیین ساختار مدل

- تعیین متغیرها
- تعیین محدودیت ها و اهداف بصورت توابع ریاضی
- تعیین ارتباط بین متغیرها بصورت توابع ریاضی
- تبدیلات و تعریفها

۳ - حل مدل

- دقیق
- تقریبی
- هیورستیک
- تحلیل حساسیت جواب نسبت به پارامترهای مسئله

۴ - اعتبار مدل

- امتحان خروجی با مسایل استاندارد و شرایط واقعی

۵ - اجرای نتایج

- برخورد با عوامل انسانی
- بسترسازی مناسب جهت اجرا

سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)	جزوه تحقیق در عملیات		تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	تاریخ: ۸۵/۵/۳
	فصل اول - دوم - سوم		بازنگری: ۲	

۲- برنامه ریزی خطی LINEAR PROGRAMMING

مدلسازی برنامه ریزی خطی

برنامه ریزی خطی بدین جهت به این نوع مسایل گفته می شود که در ساختن مدل ریاضی فقط از معادلات خطی استفاده می گردد. در ادامه با ارائه یک مثال نحوه مدلسازی معرفی می گردد.

مثال ۱-۲- شرکت رنگ سازی

یک شرکت رنگ سازی دو نوع رنگ برای داخل و خارج خانه ها تولید می کند و تولیدات را به توزیع کننده تحویل می دهد. دو ماده اولیه A و B مواد مهم در تولید این رنگها می باشند. ماده A حداکثر ۶ تن در روز در دسترس می باشد و ماده B حداکثر ۸ تن در روز موجود است.

برای تولید هر تن رنگ خارجی و داخلی احتیاج به مقادیر متفاوتی از این مواد است که در جدول زیر مشخص گشته است :

مقدار مصرف در یک تن رنگ (واحد تن)	حداکثر موجودی در	
	رنگ داخلی	رنگ خارجی
ماده خام A	۲	۱
ماده خام B	۱	۲
	روز	روز
	۶	۸

قسمت توزیع معتقد است که رنگ داخلی حداکثر می تواند یک تن از رنگ خارجی بیشتر تولید گردد و همچنین حداکثر تقاضا برای رنگ داخلی محدود و در روز ۲ تن است. سود حاصل از هر تن رنگ خارجی \$ ۳۰۰۰ و برای هر تن رنگ داخلی \$ ۲۰۰۰ می باشد. مطلوبست برنامه تولید روزانه این دو نوع رنگ بطوری که حداکثر سود ممکن بدست آید.

حل :

پاسخ گویی به سئوالات زیر به یافتن ساختار مدل ریاضی کمک می کند.

سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)	جزوه تحقیق در عملیات		تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	۸۵/۵/۳ تاریخ :
	فصل اول - دوم - سوم		بازنگری : ۲	

- ۱ - مدل به دنبال چه می گردد و چه چیزی را می خواهد تعیین کند؟ (به عبارت بهتر متغیرها و ناشناخته ها چیست که باید تعیین گردد).
- ۲ - هدف چیست و معیار ارزیابی دارای چه جنسی می باشد؟
- ۳ - محدودیت ها چه می باشند و متغیرها چه شروطی را باید داشته باشند؟

پاسخ ۱- تعیین متغیرهای تصمیم گیری:

از آنجایی که ما در پی یافتن مقادیر تولید جهت هر نوع رنگ داخلی و خارجی می باشیم استفاده از متغیرها به صورت زیر مناسب است.

$$X_E = \text{میزان تولید رنگ خارجی بر حسب تن}$$

$$X_I = \text{میزان تولید رنگ داخلی بر حسب تن}$$

پاسخ ۲ - تعیین تابع هدف مسئله :

سود حاصل از فروش هر تن رنگ خارجی ۳۰۰۰ دلار است پس با توجه به میزان تولید این رنگ که متغیر بوده و X_E تن می باشد سود حاصل $۳X_E$ هزار دلار می باشد. مشابه این مورد برای رنگ داخلی نیز صادق است و سود حاصل $۲X_I$ هزار دلار می باشد. بنابراین اگر Z را کل سود حاصل در این کارخانه بنامیم هدف تولید در این شرکت که بردن حداکثر سود است می تواند بصورت یک تابع ریاضی یعنی:

$$Z = ۳X_E + ۲X_I \text{ نوشته شود.}$$

حال هدف یافتن مقادیر ممکن برای X_E و X_I است بطوری که تابع عایدی را حداکثر سازد.

پاسخ ۳ - تعیین محدودیتهای مسئله:

با توجه به متن اصلی مسئله، متوجه میزان محدود مواد A و B در تولیدات شرکت می شویم یعنی داریم.


$$\text{حداکثر مواد A در دسترس} \leq \text{میزان مصرف ماده A در هر دو محصول}$$

$$\text{حداکثر مواد B در دسترس} \leq \text{میزان مصرف ماده B در هر دو محصول}$$

این موارد ما را به نامعادلات زیر می رسانند:

$$X_E + ۲X_I \leq ۶ \quad \text{ماده خام A}$$

$$\leq$$

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

$$2X_E + X_I \leq 8 \quad \text{ماده خام B}$$

تقاضای دو محصول نیز تولید هر محصول را به نوعی محدود می کند. مطابق متن صورت مسئله داریم:

$$\begin{aligned} \text{تن در روز ۱} &\geq \text{حداکثر میزان اختلاف رنگ داخلی تولیدشده نسبت به رنگ خارجی} \\ \text{تن در روز ۲} &\leq \text{تقاضا جهت رنگ داخلی} \end{aligned}$$

این موارد به صورت ریاضی به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} X_I - X_E &\leq 1 && \text{اضافه تولید رنگ داخلی نسبت به خارجی} \\ X_I &\leq 2 && \text{حداکثر تقاضا برای رنگ داخلی} \end{aligned}$$


نکته مهم دیگر در تهیه مدل در این مسئله در نظر گرفتن این نکته است که مقادیر تولید نمی تواند مقادیر منفی انتخاب کند یعنی X_E و X_I هر مقداری نمی تواند بگیرد و داریم $0 \leq X_E$ و $0 \leq X_I$

نتایج این سه پاسخ بصورت زیر می تواند خلاصه شود.

<p>مقادیر تولید رنگ خارجی X_E و رنگ داخلی X_I به گونه ای بیابید که:</p> <p>تابع هدف) $Z = 3X_E + 2X_I$ maximize</p> <p>بطوریکه :</p> $X_E + 2X_I \leq 6$ $2X_E + X_I \leq 8$ $-X_E + X_I \leq 1$ $X_I \leq 2$ $X_E \geq 0 \quad X_I \geq 0$
--

مقادیری از X_E و X_I که در کلیه محدودیتها صدق کند یعنی کلیه شروط را داشته باشد بنام Feasible solution یا حل شدنی نامیده می شود.

تمرین ۱-

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم

- اگر قسمت توزیع اعلام می کرد که رنگ داخلی حداقل باید یک تن از رنگ خارجی بیشتر باشد مدل ریاضی چه تغییری می کرد؟
- اگر نیاز روزانه مواد A حداکثر ۶ تن و حداقل ۳ تن باشد مدل ریاضی چگونه می شود؟
- آیا $X_E = 1$ و $X_I = 4$ یک حل شدنی (ممکن) است چرا؟
- آیا $X_E = 2$ و $X_I = 2$ یک حل شدنی (ممکن) است. چرا؟

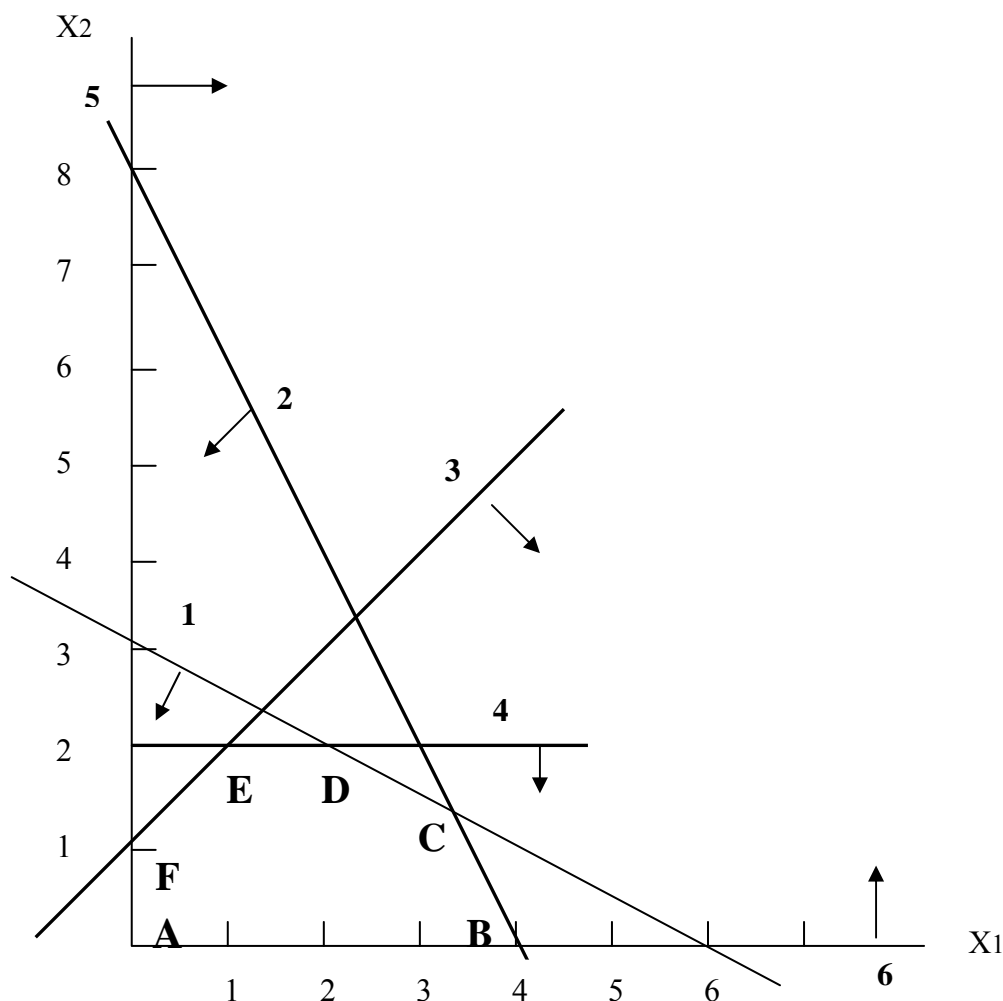
حل گرافیکی مدل LP

مسئله مطرح شده در مثال ۱-۲ را در نظر بگیرید. از آنجایی که این مسئله فقط دو متغیر تصمیم گیری دارد می توان آن را از طریق ترسیم حل کرد. هر چند این تکنیک در حل مسایل واقعی کاربرد ندارد ولی به ما کمک می کند تا اساس کار حل این گونه مسایل را درک کنیم. بعلاوه در صورت استفاده از جواب کامپیوتری بتوانیم درک عمیق تری از خروجی کامپیوتر داشته باشیم.

قدم اول در روش ترسیمی مشخص کردن فضای جواب قابل قبول (Feasible solution space) می باشد. بطوری که تمام محدودیت ها را بطور همزمان ارضاء کند. شکل ۱-۲ این فضا را برای مثال ۱-۲ نشان می دهد. متغیرهای غیر منفی $X_E \geq 0$ و $X_I \geq 0$ معرف این نکته می باشند که رسم ربع اول صفحه مختصات برای حل کفایت می کند. برای مشخص شدن سایر محدودیت ها ابتدا نامعادلات $(\leq \geq)$ را به حالت $(=)$ تبدیل می کنیم و خط حاصل را رسم می کنیم. سپس با امتحان یک نقطه دلخواه مانند $(0, 0)$ طرفی که از خط قابل قبول است انتخاب می گردد بعنوان مثال $(0, 0)$ در نامعادله $X_E + X_I \leq 1$ صدق می کند و این معرف این است که کل نقاط آن سمت خط که نقطه $(0, 0)$ در آن است در نامعادله مربوطه صدق می کند. با انجام این عمل برای تمام نامعادلات، چند ضلعی ABCDEF به عنوان فصل مشترک تمامی محدودیتها بدست می آید.

۹	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم	۲۶ از ۱۱ صفحه

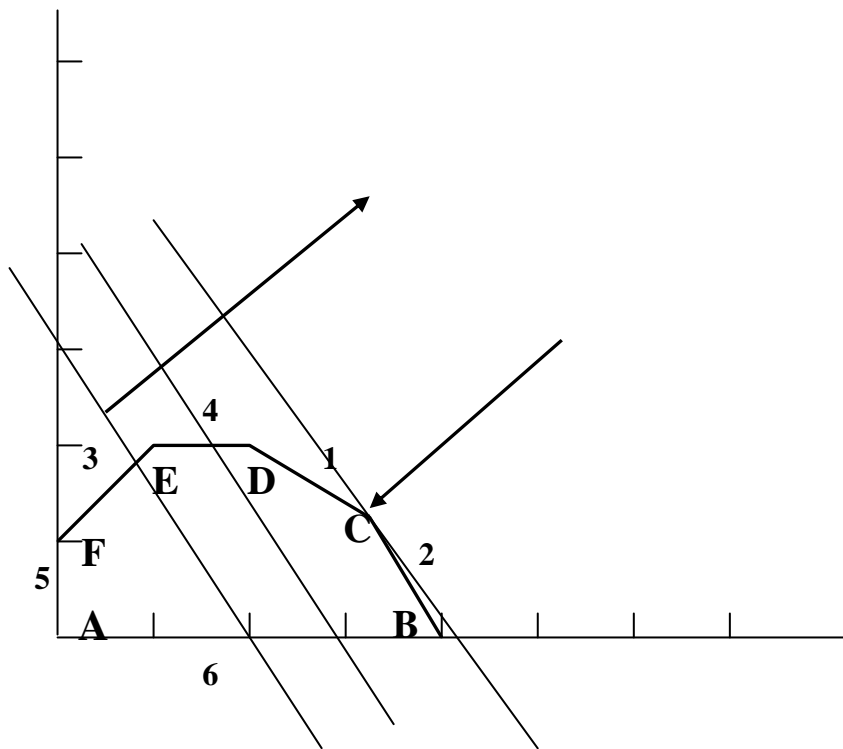
۸۵/۵/۳	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم



شکل ۱-۲

قدم دوم یافتن بهترین جواب است. برای یافتن جواب بهینه (Optimum Solution) خط مربوط به تابع هدف یا عایدی را در جهت بهتر شدن آنقدر حرکت می دهیم تا با محدوده فضای جواب اشتراک داشته باشد و دیگر امکان بهبود وجود نداشته باشد. (شکل ۲-۲) با حرکت این خط در جهت بهبود به نقطه ای هدایت می شویم که اولاً چون در فضای جواب شدنی است پس در تمام محدودیت ها صدق می کند و ثانیاً بهترین مقدار تابع هدف را حاصل می سازد. در این مثال نقطه C نقطه موردنظر است. این نقطه حاصل برخورد محدودیتهای ۱ و ۲ می باشد.

۸۵/۵/۳	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم




شکل ۲-۲

هر نقطه در داخل فضای جواب معرف یک نقطه شدنی برای مسئله است. از بین تعداد نامحدودی نقطه شدنی نقطه C به عنوان جواب بهینه بدست آمده است. مختصات تقریبی نقطه C که جواب بهینه مسئله است از شکل بدست می آید. برای یافتن مقادیر دقیق X_E و X_I کافی است دستگاه معادله زیر حل گردد.

$$\begin{cases} X_E + 2X_I = 6 \\ 2X_E + X_I = 8 \end{cases} \quad \text{I}$$

با حل همزمان دستگاه I مقادیر $X_E = 3,33$ و $X_I = 1,33$ بدست می آید. و این اعداد معرف این سیاست تولید است که رنگ خارجی $3,33$ و رنگ داخلی $1,33$ تن در هر روز تولید گردند. مقدار عایدی به ازای این سیاست تولید بصورت زیر محاسبه می گردد.

$$Z = 3(3.33) + 2(1.33) = 12.66 \text{ هزار دلار}$$

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

بعد از حل مدل توسط نرم افزار WINQSB جدول ۱-۳ ظاهر می گردد در این جدول در زیر سطر هر متغیر مقادیر جواب بهینه و در زیر ستون RHS مقدار منابع هدف بهینه درج می گردد. مقادیر ستون Dual مربوط به ارزش هر واحد منبع می باشد که در قسمت تحلیل حساسیت به آن می پردازیم.

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	3.3333	3	10	0	basic	1	4
X2	1.3333	2	2.6667	0	basic	1.5	6
Objective Function		(Max.) =	12.6667				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	6	<=	6	0	0.3333	4	7
C2	8	<=	8	0	1.3333	6	12
C3	-2	<=	1	3	0	-2	M
C4	1.3333	<=	2	0.6667	0	1.3333	M


جدول ۱-۳

متغیر Slack معرف مقدار منبعی است که از محدودیت کوچکتر مساوی (\leq) باقی مانده است.

مقدار اولیه منبع هر محدودیت در ستون اول یعنی RHS (Right Hand Side) و باقی مانده آن در ستون دوم است.

محدودیت های (\geq) یک حداقل را که در سمت راست است مشخص می کند. متغیر Surplus معرف اختلافی است که با این حداقل ایجاد شده است.

(ستونهای Reduced و Dual Value در قسمت های بعدی توضیح داده می شود.)

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

تمرین ۲ -

فضای جواب و جواب بهینه (شامل متغیرهای Slack / Surplus برای محدودیت‌های ۱ الی ۴) را برای مثال حل شده در صورتی که تغییرات زیر انجام شود بدست آورید. (هر بند بصورت مجزا حل شود)

- حداکثر تقاضا برای رنگ داخلی ۳ تن گردد.
- مواد اولیه / روزانه موجود B حداکثر ۸ تن گردد.
- تابع هدف بصورت $Z = X_E + 3X_I$ تغییر کند.

۳- تحلیل حساسیت


تحلیل حساسیت عبارت است از مطالعه اثر تغییرات پارامترهای مسئله روی حل بهینه یک مسئله با توجه به مشخصه های پویایی مسایل. این ابزار امکان مطالعه رفتار جواب بهینه را با توجه به امکان تغییر پارامترها فراهم می سازد. اگر چه محاسبات تحلیل حساسیت در اکثر نرم افزارهای OR نظیر DS ، TORA ، WINQSB ، LINDO ، LINGO و ... بطور خودکار انجام می گیرد ، شناخت انجام انی فرآیند به درک بهتر نتایج حاصل کمک زیادی می کند. در این قسمت از ابزارهای گرافیکی جهت بیان عناصر اساسی این تحلیل استفاده می شود.

مسئله حساسیت ۱- چه مقدار تغییر در ضرایب تابع هدف مجاز می باشد؟ (تا حل بهینه تغییر نکند)

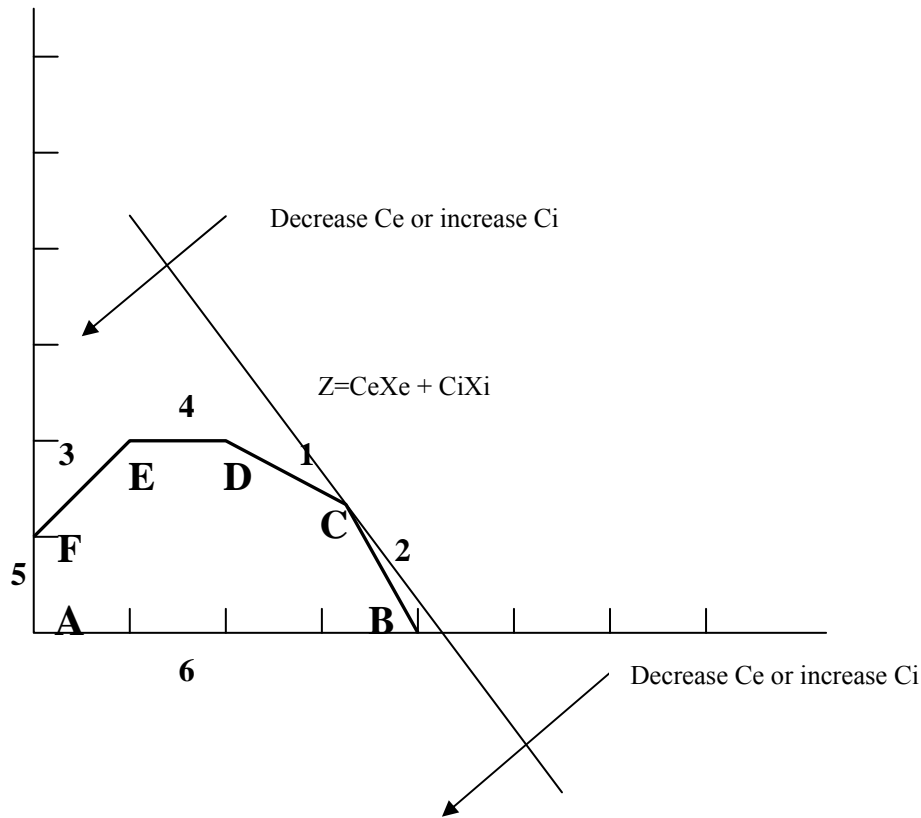
تغییر در ضرایب تابع هدف تنها شیب خط تابع هدف را تغییر می دهد. این کار در تمرین ۲-۳ نشان داده شده است. هدف اصلی، در تحلیل حساسیت محدوده مجاز برای تغییرات هر یک از ضرایب تابع هدف بصورت مجزا است به گونه ای که گوشه مربوط به حل بهینه کماکان بهینگی خود را حفظ کند.

در مثال قبل پارامترهای C_E و C_I را سود حاصل از یک تن رنگ خارجی و داخلی فرض کنید. بنابراین هدف مجدداً بصورت زیر نوشته می شود:

$$Z = C_E X_E + C_I X_I$$

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

شکل ۳-۱ اثرات ناشی از افزایش / کاهش در ضرایب C_I و C_E را بصورت گردش خط Z در جهت عقربه های ساعت و یا خلاف عقربه های ساعت حول نقطه بهینه C نشان می دهد. ایده اصلی یافتن محدوده مجاز برای تغییرات C_I و C_E است به گونه ای که C کماکان نقطه بهینه باشد.



شکل ۳-۱

با بررسی شکل ۳-۱ مشاهده می گردد که حدود مجاز گردش Z بین خطوط CB و CD می باشد. در این محدوده نقطه C کماکان شرط بهینگی خود را حفظ می کند. (اگر Z روی CB و CD منطبق گردد چه اتفاق می افتد؟^۱) در نتیجه بصورت جبری داریم:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{C_F}{C_I} \leq \frac{2}{1} \quad \text{II}$$

^۱ در این حالت علاوه بر نقطه C نقاط دیگری نیز دارای شرط بهینگی می باشند و کلیه نقاط CB یا CD بهینه می باشد.

۸۵	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد		جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم	۲۶ از ۱۷ صفحه

رابطه فوق فقط در صورتی صحیح است که $C_I \neq \emptyset$ باشد. اگر در مثال مربوطه مقدار C_I را ثابت و برابر ۲ فرض کنیم نامعادله بصورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{CF}{2} \leq \frac{2}{1} \quad \text{II}$$

یا

$$1 \leq C_I \leq 4$$

معنی این عبارت این است که با ثابت فرض کردن $C_I = 2$ ، C_E می تواند در دامنه [۱،۴] تغییر کند و نقطه C کماکان بهینگی خود را حفظ می کند. با اقدام مشابه C_E را ثابت و برابر ۳ (مقدار موجود) فرض می کنیم و دامنه تغییرات مجاز C_I از رابطه II بصورت زیر در می آید:


$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{C_I} \leq \frac{2}{1}$$

یا

$$\frac{3}{2} \leq C_I \leq 6$$

در جواب بهینه به هر متغیر یک پارامتر نسبت داده می شود که توسط آن پتانسیل سوددهی متغیر در آن وضعیت اندازه گیری می شود. اگر متغیر تصمیم گیری هم اکنون در حل بهینه مقدار مثبت گرفته باشد، این شاخص مقدار صفر را جهت پتانسیل سوددهی نشان می دهد. اگر یک متغیر تصمیم گیری در حل بهینه مقدار صفر گرفته باشد این شاخص مقداری غیر صفر به ما ارائه می دهد. در ادبیات OR به این شاخص « reduced cost » گفته می شود. این شاخص تابعی از ضرایب تابع هدف و ضرایب مربوط به محدودیت ها^۲ است.

^۲ توضیحات بیشتر احتیاج به اطلاعاتی از روش تئوری ریاضی حل دارد.

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد		جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم	۲۶ از ۱۸ صفحه

حل مدل با استفاده از نرم افزار WINQSB جهت مقایسه با نتایج بدست آمده از نرم افزار DS در قسمت ضمايم در جدول ۲-۳ ارائه شده است .

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
XE	3.3333	3	10	0	basic	1	4
XI	1.3333	2	2.6667	0	basic	1.5	6
Objective Function		(Max.) =	12.6667				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	6	<=	6	0	0.3333	4	7
C2	8	<=	8	0	1.3333	6	12
C3	-2	<=	1	3	0	-2	M
C4	1.3333	<=	2	0.6667	0	1.3333	M

جدول شماره ۲-۳

تمرین ۳ -

- ۱ - در صورتیکه تابع هدف بصورت $Z = ۳X_E + X_I$ دربیاید حل بهینه چه نقطه‌ای است.
- ۲ - جواب بهینه جدید بند ۱ را با DS بدست آورید و در مورد reduced cost های بدست آمده نظر دهید.
- ۳ - در صورتیکه تابع هدف بصورت $Z = X_E + ۳X_I$ در بیاید حل بهینه چه نقطه‌ای است؟ دامنه تغییرات ضرایب X_E و X_I در تابع هدف در این حالت چیست؟

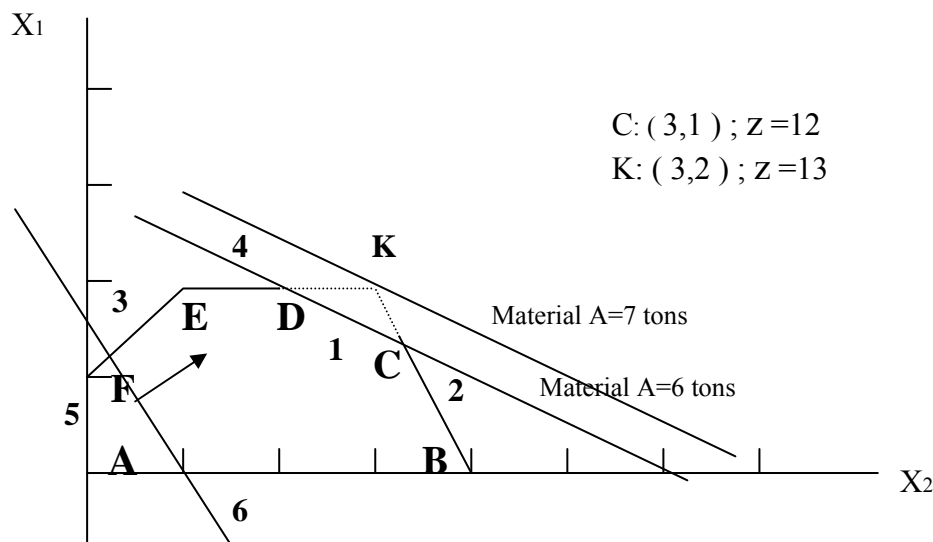
۸۵/۵/۳	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

مسئله حساسیت ۲


یک واحد منبع ما چه میزان می‌ارزد؟

این مسئله حساسیت جواب بهینه را در مورد تغییرات ضرایب سمت راست محدودیتها بررسی می‌کند. اگر محدودیت بیانگر منبع محدودی باشد، مسئله تبدیل به بررسی اثر تغییر در مقدار منبع موجود روی عایدی می‌گردد. هدف اصلی این مسئله حساسیت، تعیین اثر تغییرات سمت راست محدودیتها روی مقدار تابع هدف است. به عبارت ساده‌تر، نتایج توسط مشخص شدن یک محدوده مجاز جهت سمت راست ارائه می‌گردد. در این محدوده با تغییر مقدار منبع محدودیت تابع هدف با یک نرخ ثابت کاهش یا افزایش می‌یابد. برای روشن‌تر شدن مطلب به مثال کارگاه رنگ سازی برمی‌گردیم.

محدودیت اول مسئله که مربوط به ماده اولیه A بود را در نظر بگیرد. هر گونه تغییر در مورد میزان منبع A خط محدودیت را بصورت موازی به بالا و یا پایین حرکت می‌دهد. (شکل ۲-۳)



شکل ۲-۳

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم

مقدار تابع هدف مادامی که جواب بهینه محل برخورد محدودیتهای ۱ و ۲ است با نرخ ثابتی تغییر می کند. با بررسی روی شکل ۲-۳ مشاهده می شود با اضافه شدن منبع A خط محدودیت بطرف بالا حرکت می کند و اگر از نقطه K بگذرد این محدودیت بصورت مازاد (redundant) در می آید (یعنی اضافه داشتن منبع تغییری در فضای جواب نمی دهد، پس فایده ای برای تولید ما ندارد).

حال اگر مقدار منبع A کم شود خط محدودیت پایین می آید و اگر از نقطه B بگذرد محدودیت ۲ بصورت مازاد در می آید یعنی جواب جدید محل برخورد محدودیت ۱ و ۶ است.

برای یافتن حدود مجاز از نقاط مرزی بدست آمده در بالا استفاده می شود با قراردادن نقطه B یعنی ($X_E = 4$ و $X_I = 0$) در محدودیت ۱ مقدار منبع خواهد بود:

$$1(4) + 2(0) = 4$$

بطور مشابه با قراردادن نقطه K یعنی ($X_E = 3$ و $X_I = 2$) در سمت چپ محدودیت اول خواهیم داشت:

$$1(3) + 2(2) = 7$$

در نتیجه محدوده مجاز تغییر منبع A که در این محدوده رابطه خطی بین مقدار تغییر منبع و تغییرات جواب بهینه یعنی Z دارد بصورت زیر است:

$$4 \leq \text{مقدار منبع A در دسترس} \leq 7$$

با یافتن مقادیر سود در نقاط B و K و مقایسه نسبی آن دو می توان مشخص کرد که به ازای زیاد شدن هر واحد منبع چه میزان سود اضافی حاصل می گردد. یعنی داریم:

$$\text{در نقطه B } Z = 3(4) + 2(0) = 12$$

$$\text{در نقطه K } Z = 3(3) + 2(2) = 13$$

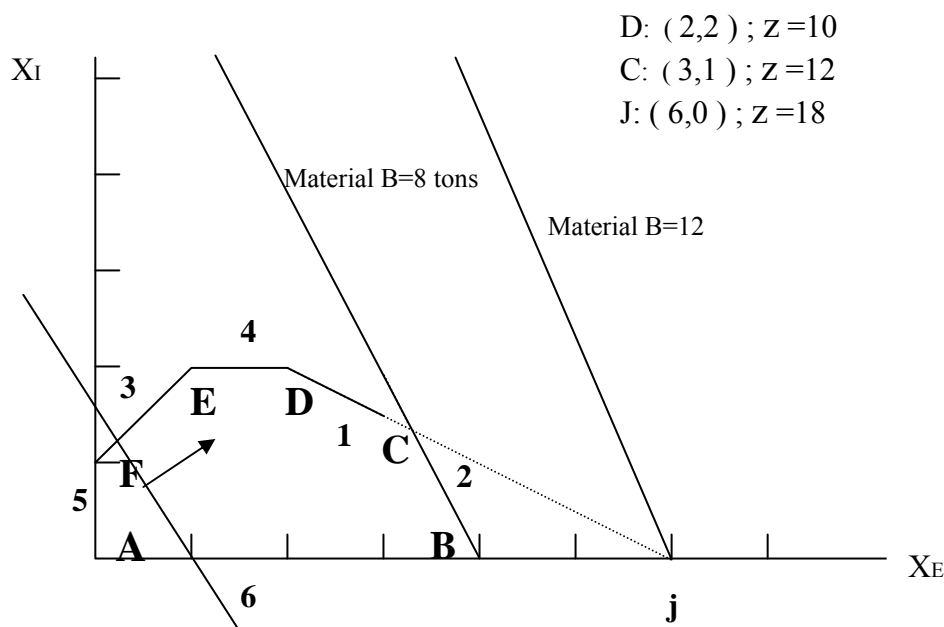
در نتیجه میزان اضافه شدن سود به ازای اضافه شدن یک واحد منبع بصورت زیر بدست می آید:

$$y_1 = \frac{13-12}{7-4} = \frac{1}{3} \quad \text{هزار دلار}$$

۸۵	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

مقدار ثابت y_1 معرف ارزش یک واحد اولیه برای این واحد صنعتی است. زیرا با افزایش (یا کاهش) یک واحد منبع A سود Z به اندازه $\frac{1}{3}$ افزایش (یا کاهش) می یابد. و این رابطه تا زمانی که مقدار منبع A بین ۴ و ۷ است درست است.

با انجام اقدام مشابهی برای منبع B حدود تغییرات منبع تا نقاط D و J، می باشد با توجه به شکل ۳-۳ در نتیجه محدوده مجاز تغییرات منبع B، [6,12] می باشد. چگونه؟ با این مقادیر منبع سودهای ۱۰ و ۱۸ (به ترتیب در نقاط D و J) حاصل می گردند.



شکل ۳-۳

پس میزان ارزش یک واحد منبع B در محدوده [۶۱۲] بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$y_2 = \frac{18-10}{12-6} = \frac{4}{3} \quad \text{هزار دلار برای هر واحد B}$$

یعنی با افزایش (یا کاهش) یک واحد مواد اولیه B (به شرطی که در محدوده [۶۱۲] باشد، میزان سود بدست آمده $\frac{4}{3}$ هزار دلار افزایش (یا کاهش) می یابد.

سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد		جزوه تحقیق در عملیات
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم

محاسبات بالا برای محدودیتهایی انجام شد که تمام منابع آنها مصرف شده بود و میزان باقی مانده این محدودیتها صفر بود (یعنی متغیر Slack مربوط به آن صفر بود).


حال باید دید این مطالب در مورد محدودیتهایی که مازاد آنها مثبت است (Slack غیرصفر) به چه صورت در می آید. مثلاً محدودیتهای ۳ و ۴ با توجه به بررسی شکل ۱-۲ مشاهده می شود که با افزایش سمت راست محدودیت ۳ هیچ اتفاقی روی فضای جواب و در نتیجه جواب بهینه نمی افتد. همچنین کاهش این منبع مادامی که نقطه C را در فضای جواب از بین نبرده مشکلی ایجاد نمی کند. این حالت زمانی اتفاق می افتد که مقدار سمت راست منبع ۲ - گردد پس محدوده مجاز برای محدودیت ۳ خواهد بود $[-2, \infty]$ با اقدادی مشابه برای محدودیت ۴ رنج مجاز $[\infty, 1, 33]$ بدست می آید.

قسمت پایین جدول ۲-۳ و یا گزارش Ranging خروجی نرم افزار DS در قسمت ضمامم ، حاصل این اعمال را نشان می دهد. به ارزش منابع در کتابها Dual Prices یا Dual Value^۳ می گویند. همچنین برخی نرم افزارها آن را با نام Shadow prices نیز نامیده اند.

تمرین ۴ -

- ۱ - در صورتیکه بتوانید ۱ تن ماده اولیه تهیه کنید کدام ماده اولیه را انتخاب می کنید؟
- ۲ - در صورتیکه بتوانید ماده اولیه B از بازار تهیه کنید، خرید هر تن آن تا چه مبلغی برای شما به صرفه است؟ حداکثر خرید چند تن به این مبلغ مجاز می باشد؟ چرا؟
- ۳ - در صورتیکه کارخانه دیگر بخواهد مقداری ماده اولیه A از شما بخرد به چه مبلغی بفروشید برای شما بصرفه است؟ حداکثر فروش چند تن به این مبلغ مجاز می باشد؟ چرا؟
- ۴ - در صورتیکه میزان ماده اولیه B برابر ۱۳ واحد باشد حل بهینه چیست؟ قیمت هر واحد از منابع را در این حالت مشخص کنید؟

^۳ این نام با توجه به مسئله دوگان Dual Problem در LP انتخاب شده است.

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم
			۲۶ از ۲۳ صفحه

ضمیمه ۱: مفروضات برنامه ریزی خطی در واقعیت

زمان استفاده از برنامه ریزی خطی موارد زیر ناخواسته مورد تایید شما است لذا بهتر است به آن فکر کنید .

۱- قیمت تمام شده محصولات بصورت خطی است . این مورد در بازه محدودی تقریباً درست است و برای پیروید بعد بصورت تخمینی است .

۲- هزینه مواد مستقیم خطی است و میزان خرید (تخفیفات) لحاظ نشده است .

۳- هزینه دستمزد مستقیم یا خطی است و صرفاً مربوط به زمان عادی است .

۴- تولید در زمان اضافه کاری باید با اطلاعات مجزا وارد مدل گردد زیرا

a. هزینه دستمزد در ساعات اضافه کاری مطابق قانون کار تفات دارد

b. راندمان تولید با اضافه کار پایین می آید .

c. کیفیت پایین تر بوده و هزینه ضایعات و هزینه دوباره کاری در قیمت تمام شده باید لحاظ گردد.

۵- هزینه های سربار با ترکیب جدید و تعداد جدید خطی نیست ولی از این میزان صرف نظر می شود .

با توجه به ملاحظات فوق نظر به اینکه سیستم های هزینه یابی قادر به تخمین رفتارهای غیر خطی هزینه و درآمد نیست و استفاده از مدل غیر خطی نیز جهت مدیران برآحتی امکان پذیر نیست حتما باید ب ملاحظات مطرح شده به تحلیل حساسیت بخصوصی در بخش هزینه و با سود توجه شود .

بصورت یک قانون تجربی حساسیت جواب با تغییرات یکسان ۵٪ در کلیه هزینه ها و یا تخفیفات برای کلیه محصولات بالا نبوده و تاثیر معنی داری در تغییر ترکیب تولید ندارد .

سایر نکات تحلیل حساسیت :

به همان اندازه که مدلسازی کار تصمیم گیری و توجیه آن را ساده می کند اشتباه قابل گذشت نیست یک اشتباه ساده و سرانگشتی سرنوشت شرکت و امنیت شغلی شما را بخطر می اندازد هر چند ارزیابی حسابرسانها صرفاً بر اساس اطلاعات مالی و قانونی است و هیچ مدیری تا کنون با اتهام عدم استفاده بهینه از منابع و فرصتها مخاکمه نشده است ولی همواره مدیران میانی و پرسنل اندیشمند اشتباهات مدیران ارشد را در سازمانهای غیر رسمی به نقد می کشند .

۱- دیمانسون تابع هدف با Shadow price و Reduce cost یکسان است و مطابق عادت همیشه این دیمانسیون مبالغ پولی (ریال یا دلار) نیست . بعنوان مثال هر واحد منبع با خط کش تابع هدف ارزش گذاری می شود .

سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد		جزوه تحقیق در عملیات
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول - دوم - سوم

۲- در مسائل با بیش از یک تابع هدف شما برای هر منبع بیش از یک Shadow price دارید که هر یک مربوط به یک تابع هدف می شود . اشتباه در تحلیل قابل گذشت نیست .

۳- هر یک از اقلام مواد و یا نیروی کار یک محدودیت نیست در صورتیکه تامین کنندگان شما از لحاظ تیراژ مشکلی نداشته باشند و یا شما امکان خرید از منابع تامین متفاوت را داشته باشید آنرا بعنوان محدودیت لحاظ نکنید .

۴- ارزش یک واحد منبع در مدل‌های سود max نسبت به فروش max تفاوت دارد در مدل‌های "سود" به اندازه قیمت متداول بازار این منبع از تابع هدف کم شده است و خروجی کامپیوتر صرفاً معرف تاثیر مستقیم روی سود است .


۵- زمان استفاده از مدل به گونه ای باید باشد که شما و تامین کنندگان فرصت کافی جهت برنامه ریزی و تامین منابع و همچنین اعمال تغییرات را داشته باشید . به عنوان یک اصل از برنامه ریزی شما باید از لحظه تصمیم فرصتی به اندازه حداکثر پیش زمان (lead time) داشته باشید .

۶- طول مدت برنامه ریزی علاوه بر الزامات اطلاعاتی مربوطه وابسته به اختیار تصمیم گیرنده است . به عبارت دیگر سطح تصمیم گیری هر چه به لایه عملیاتی نزدیک تر می شود پریودها کوتاه تر و لی مسئله چند پریود خواهد شد . این انتخاب با تعریف محدودیتهای منابع ارتباط تنگاتنگی دارد . به عنوان یک اصل دیگر توسعه و تغییر ظرفیت آن دسته از منابع که بصورت محدودیت آورده شده است در افق برنامه ریزی مورد نظر با همان قیمت امکان پذیر نیست .

۷- مدل‌های تصمیم گیری به عنوان موتور اصلی یک سیستم تصمیم گیری در DSS ها با ثبات تر عمل خواهند کرد . به همین ترتیب مدل‌های تولید نیز در سیستم های برنامه ریزی تولید اثر بخش تر خواهند بود . این گونه سیستم ها مسائل را در چند سطح از کلان تا عملیات خرد و بصورت مرتبط حل خواهند کرد . بدون پشتیبانی اطلاعات مالی ، فنی ، بازرگانی ، بازار استفاده مداوم از این مدلها امکان پذیر نیست .

Shadow Price چیست ؟ چرا این لغت انتخاب شده است ؟

پاسخ در معنی و مفهوم shadow باید جستجو کرد . هر چند مترجمین shadow را به درستی سایه و سایه ای ترجمه کرده اند ولی مفهوم اصلی این لغت در برنامه ریزی ریاضی به تفاوت در لغت shadow و shade رابطه است . هر دو لغت در فارسی یک معنی دارند ولی shade به سایه اجسام و پدیده های ساکن گفته می شود و انتخاب لغت shadow دلالت بر در حرکت بودن و متغییر بودن وضعیت جسم است . مانند انسان ، هواپیما این نکته در برنامه ریزی ریاضی معرف این است که این price تابع وضعیت شرایط کلی است انتظار ثابت ماندن بیهوده است . با تغییر شرایط همانگونه که سایه جسم متحرک تغییر اندازه و موقعیت می دهد ارزش منابع نیز تغییر می کند و این مفهوم دلیل اصلی انتخاب این لغت است که در کتب فارسی بدان اشاره نشده است .

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد	جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره، آموزش، تحقیق)
	تاریخ: ۸۵/۵/۳	بازنگری: ۲	فصل اول - دوم - سوم

ضمیمه ۲: گزارشات نرم افزار DS

Solution List -۱

این گزارش مقادیر کلیه متغیرهای اصلی و کمکی مسئله را با ذکر وضعیت ارائه می کند.


Solution List		
Variable	Status	Value
XE	Basic	3.3333
XI	Basic	1.3333
Slack 1	NONBasic	0.
Slack 2	NONBasic	0.
Slack 3	Basic	3.
Slack 4	Basic	0.6667
Optimal Value (Z)		12.6667

Ranging -۲

این گزارش علاوه بر درج مقادیر نهایی متغیرها دامنه تغییرات مجاز پارامترهای مسئله را نیز خواهد داشت. این گزارش مهمترین خروجی هر برنامه ریزی خطی است و در قسمت تحلیل حساسیت از آن استفاده می شود.

Ranging					
Variable	Value	Reduces	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
XE	3.3333	0	3	1	4
XI	1.3333	0	2	1.5	6
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	0.3333	0	6	4	7
Constraint 2	1.3333	0	8	6	12
Constraint 3	0.	3.	1	-2	Infinity
Constraint 4	0.	0.6667	2	1.3333	Infinity

Iterations -۳

	تهیه کننده: دکتر سهیل سعدی نژاد		جزوه تحقیق در عملیات	سازمان مدیریت صنعتی (مشاوره ، آموزش ، تحقیق)
	تاریخ : ۸۵/۵/۳	بازنگری : ۲	فصل اول- دوم - سوم	۲۶ از ۲۶ صفحه

این گزارش مراحل حل را نشان می دهد و برای کسانی که با محاسبات دستی آشنایی دارند آموزنده است.

Graph _۴

در صورتی که مسئله دو متغیره باشد این گزارش موجود می باشد و شکل فضای جواب را نشان می دهد.

فایل QEXE1 خروجی نرم افزار DS جهت این مسئله می باشد.

جدول ۳-۳ خروجی تجزیه و تحلیل حساسیت نرم افزار DS است. نتایج خروجی در دو بخش ارائه شده است.

۱- حدود تغییرات ضرایب تابع هدف

۲- حدود تغییرات ضرایب در محدودیتها

تمامی مطالب مربوط به قسمت اول در جدول ۳-۳ و تمامی مطالب مربوط به قسمت دوم در جدول RANGING شرح داده شده است .

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	6	<=	6	0	0.3333	4	7
C2	8	<=	8	0	1.3333	6	12
C3	-2	<=	1	3	0	-2	M
C4	1.3333	<=	2	0.6667	0	1.3333	M

جدول ۳-۳